A_5 est l'unique groupe simple d'ordre 60 (101, 103, 104, 105)

Szpirglas p. 277

prop : Tout groupe simple d'ordre 60 est isomorphe à A_5.

démo :

But : Mq il existe $H \leq G$ tel que $[G:H]=5$ car avec cela, on va avoir un isomorphisme entre G et un sous-groupe d'indice 2 dans S_5.

Soit G un groupe simple d'ordre 60.

Supposons par l'absurde que G n'admet pas de sous-groupe strict d'indice inférieur ou égal à 5 ie d'ordre supérieur ou égal à 12.

On a $|G| = 60 = 2^2 \times 3 \times 5$, on note $Syl_p(G)$ l'ensemble des p-Sylow de G et $n_p = |Syl_p(G)|$.

* Regardons le nombre de 2-Sylow de G.

D'après les thm de Sylow et comme G est simple, on a $n_2 \in \{3, 5, 15\}$.

Montrons que $n_2 = 15$:

Si $S \in Syl_2(G)$, alors d'après la relation orbite-stabilisateur :

$$[G : N(S)] = \frac{|G|}{|N(S)|} = |O(S)| = n_2$$

G agit transitivement sur $Syl_2(G)$

Ainsi par hypothèse, on a $n_2 > 5$ ie $n_2 = 15$.

Soit $S_1, S_2 \in Syl_2(G)$ tel que $S_1 \neq S_2$, montrons alors que $S_1 \cap S_2 = \{1_G\}$.

Soit $g \in S_1 \cap S_2$. Comme $|S_1| = |S_2| = 4$, S_1 et S_2 sont abéliens

Donc $S_1 \cup S_2 \subseteq C(g)$ donc $|C(g)| > 4$.

Or $S_1 \subseteq C(g)$ donc d'après le thm de Lagrange $4 = |S_1| \,/\, |C(g)| \,/\, |G| = 60$

Or par hypothèse G n'admet pas de sous-groupe d'ordre supérieur ou égal à 12, donc $|C(g)| = 60$ ie $g \in Z(G)$. Or G est simple donc $Z(G) = \{1_G\}$ d'où $g = 1_G$.

Ainsi les éléments non triviaux des 2-Sylow sont d'ordre 2 ou 4. Il y a donc au moins $n_2(2^2 - 1) = 15 \times 3 = 45$ éléments.

*Regardons le nombre de 5-Sylow de G :

D'après les thms de Sylow, on a $n_5 \mid 12$ donc $n_5 \in \{1,2,3,4,6,12\}$ mais $n_5 \equiv 1 [5]$

Donc $n_5 \in \{1,6\}$. Or G est simple donc $n_5 = 6$.

L'intersection de deux 5-Sylow distincts étant réduite à $\{1_G\}$.

Ainsi les éléments non triviaux des 5-Sylow sont d'ordre 5. Il y a donc

$$n_5(5-1) = 6 \times 4 = 24 \text{ éléments d'ordre 5 non triviaux.}$$

Donc G contient au moins $24 + 45 = 69$ éléments non triviaux.

Ce qui est absurde car $|G| = 60$.

Donc il existe un sous-groupe H de G tel que $[G:H] \leq 5$.

* Supposons que G admet un sous-groupe H d'indice 5. On a :

$$\varphi : G \longrightarrow S(G/H) \simeq S_5 \text{ est injectif}$$

Or $|G| = 60 = \frac{1}{2}|S_5|$, donc G est isomorphe à un sous-groupe d'indice 2 dans S_5.

Autrement dit $G \simeq A_5$ car A_5 est l'unique sous-groupe d'indice 2 dans S_5.

* Supposons que G admet un sous-groupe H d'indice inférieur ou égal à 4. On a :

$$\varphi : G \longrightarrow S(G/H) \text{ est injectif or } S(G/H) \hookrightarrow S_4.$$

Mais $|G| = 60 > 24 = |S_4|$ ce qui est absurde car φ est injectif.

<u>Questions</u> : A_5 unique groupe simple d'ordre 60.

- Sous-groupe strict d'indice ≤ 5 donne sous-groupe d'ordre ≥ 12 ?

$[G:H]\leq 5$ ie $\frac{|G|}{|H|}\leq 5$ ie $60\leq 5|H|$ ie $|H|\geq 12$

- Groupe d'ordre $4=2^2$ est abélien ?

Soit p premier. Montrons que tout groupe d'ordre p^2 est abélien ie montrons que $G=Z(G)$.

$Z(G)$ est un sous-groupe de G donc $|Z(G)|\in\{p,p^2\}$.

Supposons que $|Z(G)|=p$. Soit $x\in G\setminus Z(G)$.

Le stabilisateur de x est un sous-groupe de G contenant strictement $Z(G)$. Donc par le thm de Lagrange $Stab(x)=G$.

Par la relation orbite-stabilisateur, on a $|G|=|Stab\,x||O(x)|$ donc $|O(x)|=1$ ie $x\in Z(G)$.

Ce qui est absurde donc $|Z(G)|=p^2$ ie $Z(G)=G$.

- Pourquoi $|C(g)|>4$?

Comme $S_1\neq S_2$ on a $|S_1\cap S_2|=\{1,2\}$, en effet $S_1\cap S_2<S_1$ donc par le thm de lagrange $|S_1\cap S_2|\in\{1,2\}$.

Ainsi $|S_1\cup S_2|=|S_1|+|S_2|-|S_1\cap S_2|=8-|S_1\cap S_2|\geq 6>4$.

- Intersection de 2 5-Sylow distincts est réduite à $\{1_G\}$?

Soit S_1 et $S_2\in Syl_5(G)$ avec $S_1\neq S_2$ alors $S_1\cap S_2<S_1$ donc par le thm de lagrange $|S_1\cap S_2|=1$

Or $S_1\cap S_2$ est un sous-groupe de S_1 donc $S_1\cap S_2=\{1_G\}$.

- $\varphi: G\longrightarrow S(G/H)$ est injectif ?

On a $Ker\,\varphi\trianglelefteq G$ or G est simple donc $Ker\,\varphi=G$ ou $\{1_G\}$.

Si $Ker\,\varphi=G$ alors φ serait trivial, ce qui est absurde car $G\neq H$

D'où $Ker\,\varphi=\{1_G\}$.

- A_5 unique groupe d'indice 2 dans S_5 ?

Soit H un sous-groupe d'indice 2 dans S_5 alors $S_5\xrightarrow{\pi}S_5/H\overset{\varphi}{\simeq}\{\pm 1\}$

Donc $\varphi\circ\pi$ est un morphisme non trivial de S_5 dans $\{\pm1\}$, donc $\varphi\circ\pi=\varepsilon$.

Donc $H=Ker(\varphi\circ\pi)=Ker(\varepsilon)=A_5$.